Лінійна алгебра та аналітична геометрія

**Практичне заняття №9**

**Тема: Пряма на площині**

1. ***Короткі теоретичні відомості***

**Пряма на площині.** Наведемо основні види рівнянь прямої на площині:

1. – рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно до нормального вектора ;
2. – загальне рівняння прямої, де вектор – нормальний вектор прямої;
3. – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом; *k* – кутовий коефіцієнт прямої; , де *а* – кут між прямою і додатним напрямом осі *Ox, b* – ордината точки перетину прямої з віссю *Oy;*
4. *–* рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі, який задається кутовим коефіцієнтом *k;*
5. – рівняння прямої, що проходить через точку паралельно напрямному вектору (канонічне рівняння);

-параметричні рівняння прямої, де *–* параметр.

Ці рівняння у векторній формі мають вигляд:

*,*

де – радіус-вектор точки , що належить прямій, – напрямний вектор прямої;

1. – рівняння прямої у відрізках, *a* i *b* – величини напрямлених відрізків, що відтинаються прямою на координатних осях;
2. – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки і ;
3. – нормальне рівняння прямої, де та – напрямні косинуси нормального вектора , – відстань від початку координат до прямої.

Загальне рівняння прямої приводиться до нормального вигляду множенням на нормувальний множник

де знак перед коренем вибирається протилежним знаку вільного члена *С*.

Якщо , – нормальні вектори прямих та відповідно, то кут між ними визначається за формулою:

Якщо *k1, k2* – кутові коефіцієнти двох прямих, то кут між ними визначається за формулою:

Умова паралельності та перпендикулярності прямих та :

або

Якщо задано рівняння прямої *l*: і точка , то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою

1. ***Розв’язання типових задач***

**Приклад 1**. Задані вершини трикутника *A(-2, -3), B(5,4), C(-1,2)* . Скласти рівняння медіани *AM.*

Точка *М* – середина сторони *ВС*, тому

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки *А* і *М*, знайдемо рівняння медіани *АМ*: , звідки *3y-2y=0*

**Приклад 2.** Скласти рівняння прямої, що проходить таким чином:

1. Через точку *М(1,2)* та точку *N(3,5);*
2. Через точку *М(1,2)* паралельно вектору
3. Через точку *М(1,2)* перпендикулярно до вектора

Складаючи рівняння прямої, треба передусім вибрати той вигляд рівняння, який швидше приводить до мети.

1. Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки

Маємо: ; ; .

1. Використаємо канонічне рівняння прямої

Маємо: ;

1. Використаємо рівняння прямої, заданої точкою та нормальним вектором:

Маємо: ;

**Приклад 3**. Знайти відстань між прямими

Щоб знайти відстань між прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку і знайдемо відстань від неї до іншої прямої. Поклавши, наприклад, у першому рівнянні х=1, отримаємо у=2. Таким чином, точка М(1,2) . Використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо

**Приклад 4.** Задано прямі та і точка *М*

Знайти:

1. Кутовий коефіцієнт прямої і відрізок, який відтинає ця пряма на осі ординат;
2. Рівняння прямих та у відрізках;
3. Точку *N* перетину прямих і ;
4. Рівняння прямої , що проходить через точку *М* паралельно прямій ;
5. Рівняння прямої , що проходить через точку *М* перпендикулярно до прямої
6. Відстань від точки *М* до прямої :

Усі результати ілюструвати графічно.

***Розв’язання***

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: , де k – кутовий коефіцієнт прямої, – відрізок, що відтинається прямою на осі ординат (з точністю до знака).

Зведемо рівняння прямої до означеного вигляду:

1. Рівняння прямої у відрізках: , де *a* і *b* з точністю до знака визначають довжини відрізків, що відтинаються на осях координат;

a=2; b=8. a=2; b=-0.4

;

1. Рівняння прямих утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язавши цю систему, знайдемо точку перетину і :

Помноживши перше рівняння на 5 та склавши ліві і праві частини рівнянь, отримаємо:

Підставимо в перше рівняння

Точка N(2,0) – точка перетину прямих і

1. M(-4,7)

Шукана пряма

Очевидно, що – нормальні вектори прямих , , відповідно;

Рівняння прямої, що задана точкою і нормальним вектором :

1. Шукана пряма : перпендикулярне

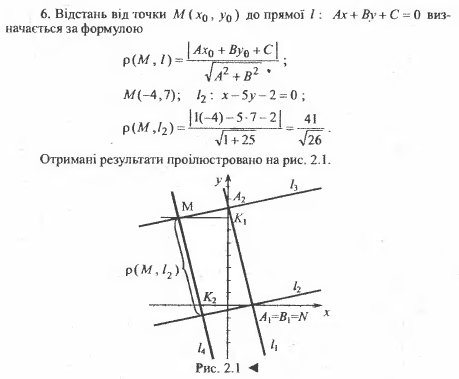
Запишемо рівняння прямої у канонічному вигляді

З цією метою проведемо такі перетворення рівняння прямої :

– напрямний вектор прямої , але =, – нормальний вектор прямої . Запишемо рівняння як рівняння прямої, що задана точкою М(-4,7) і нормальним вектором =(1;0,2):

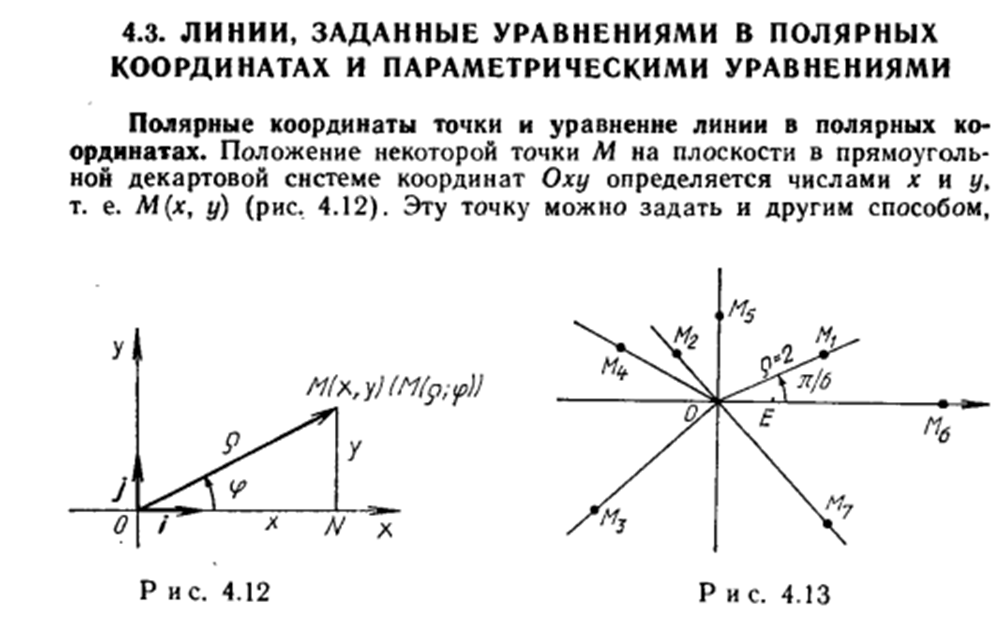
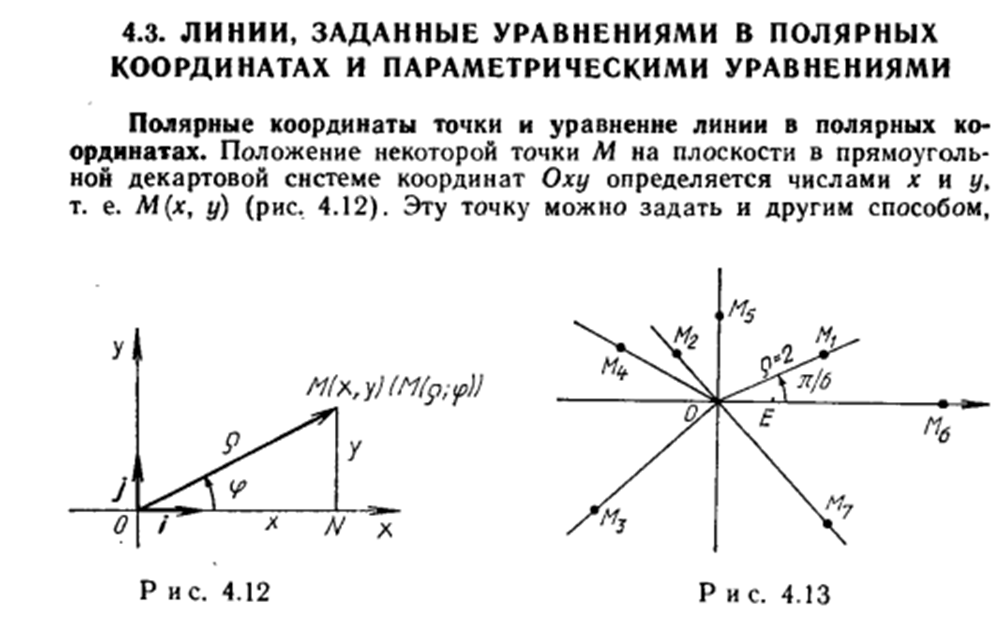
1. Відстань від точки М ( до прямої *l* : Ax + By + C = 0 визначається за формолую

Отримані результати проілюстровано на рис. 2.1.



**4.3 ЛІНІЇ, ЗАДАНІ РІВНЯННЯМИ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ І ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ**

**Полярні координати точки і рівняння лінії в полярних координатах.** Положення деякої точки *М* на площині в прямокутній декартовій системі координат визначається числами *x* і *y*, т. M (x, y) (мал. 4.12). Цю точку можна задати іншим способом,



Наприклад за допомогою відстані і кута , починаючий рахунок проти годинникової стрілки від осі який називається полярна вісь до радіуса-вектора . В такому випадку використовується запис М(). Відстань називається полярним радіусом, – полярним кутом точки М, а точка О – полюсом.

Зв’язок між декартовими *х, у* і полярними коодринатами точки М при вказаному розташуванню осей Ох і Оу, вектора і кута виражається формулами:

За допомогою формул можна знаходити декартові координати точки М по її полярним координатам. Якщо ці формули дозволити відносно , то отримаємо формули:

, , .

З допомогою яких по декартовим координатам точки М легко знайти її полярні координати.

Формули дають також можливість переходити від рівнянь ліній, заданих в декартових координатах, до їх рівнянь в полярних координатах, і навпаки.

**Приклад 1.** Побудувати точки, задані полярними координатами: , , , , , ,

На початку проведемо промінь під кутом до полярної осі Ох, потім на побудованому промені відкладемо від полюса О відрізок довжиною . В результаті знайдемо всі сім точок. Відрізок ОЕ визначає одиницю довжини.

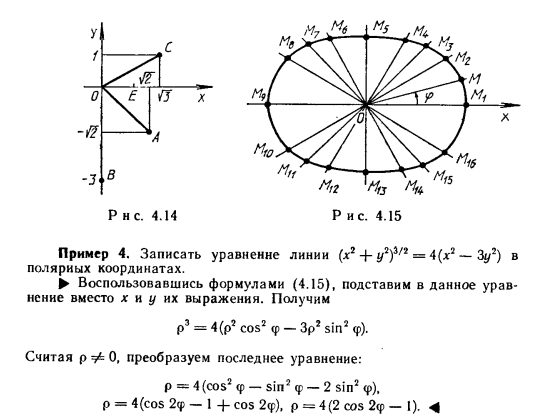
**Приклад 2.** Знайти декартові координати точок …, заданих в прикладі №1.

Відповідно з формулами маємо , ,), , , , ,

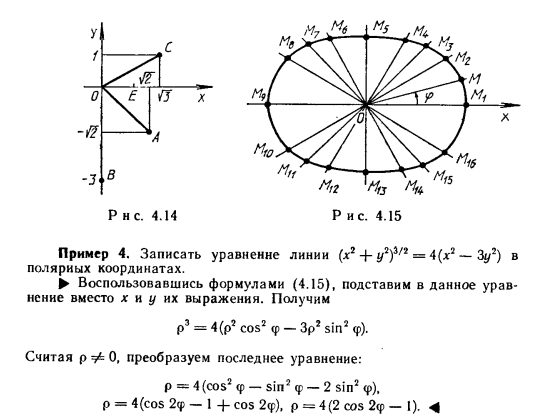
**Приклад 3.** Точки задані декартовими координатами

Побудувати ці точки і знайти їх полярні координати.

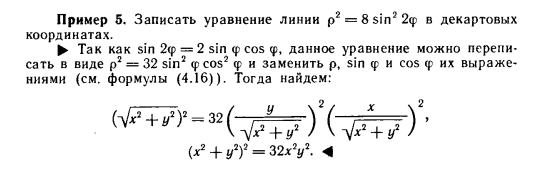
Згідно формулам, отримуємо: для точки А . A(2,); Для точки В , В(3, 3). Для точки С С(2;)



**Приклад 4.** Записати рівняння лінії в полярних координатах.

Скориставшись формулами, підставимо в дане рівняння замість х і у їх вирази. Отримаємо: 

**Приклад 5** Записати рівняння лінії в декартових координатах. Так як , данне рівняння можна переписати у вигляді і замінити їх виразами. Тоді знайдемо:

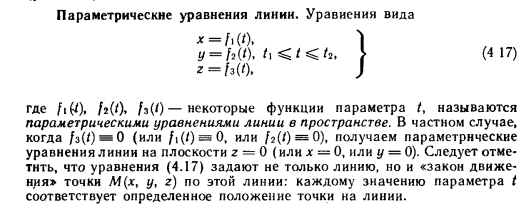


**Приклад 6.** Побудувати криву, задану виразом

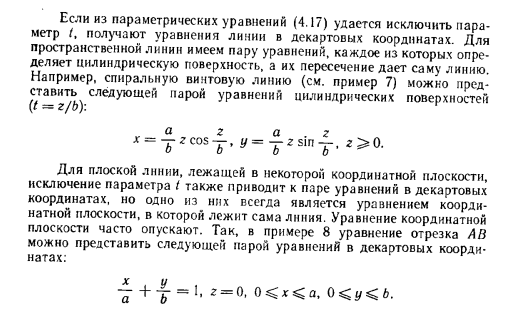
Складемо таблицю, в якій вказані значення і відповідні їм значення



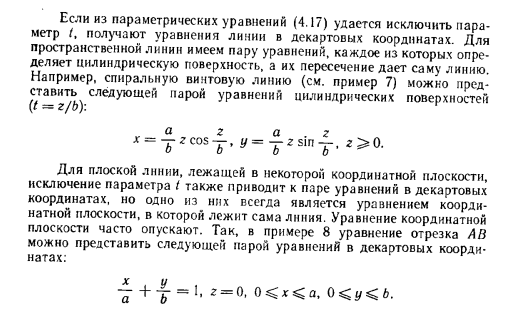
Побудувавши знайдені точки і сплолучивши їх плавною лінією, отримаємо достатньо точний графік шуканої кривої.

***Параметричні рівняння лінії***. Рівняння виду 

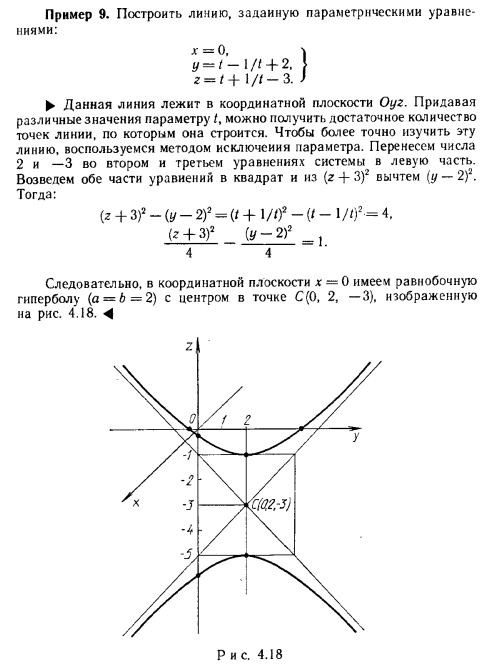
Де , , – деякі функції параметра t, називаються *параметричними рівняннями лінії в просторі.* В частковому випадку, коли , отримуємо параметричне рівняння лінії на площині z=0 (або x=0, або y=0). Варто відзначити, что рівняння задають не тільки лінію, але і «закон руху» точки М(x,y,z) по цій лінії: кожному значенню параметра t відповідає певне положення точки на лінії.

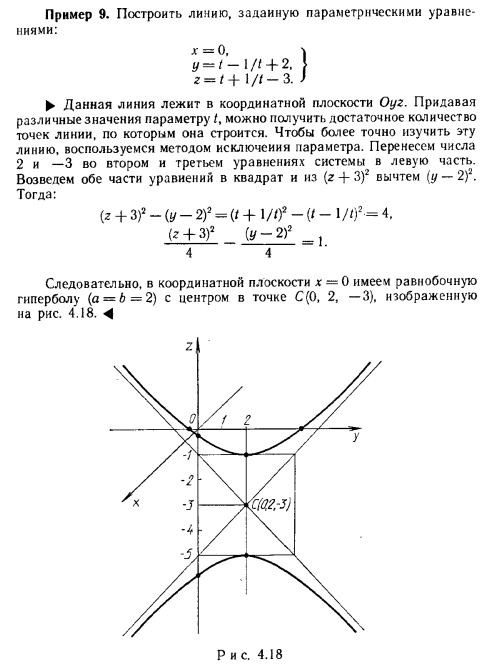
Якщо з параметричних рівнянь вдається виключити параметр t, отримують рівняння лінії в декартових координатах. Для просторової лінії маємо пару рівнянь, кожне з яких визначає циліндричну поверхню, а їх перетин дає саму лінію. Наприклад, спіральну гвинтову лінію можна представити наступною парою рівнянь цилінричних поверхонь (t=z/b) 

Для плоскої лінії, лежачої в деякій координатній площині, виключення параметра t також приводить до пари рівнянь в декартових координатах, але одне з них завжди є рівнянням координатної площини в якій лежить сама лінія. Рівняння координатної площини часто спускають. Так, в прикладі 8 рівняння відрізку АВ можна представити наступною парою рівнянь в декартових координатах.

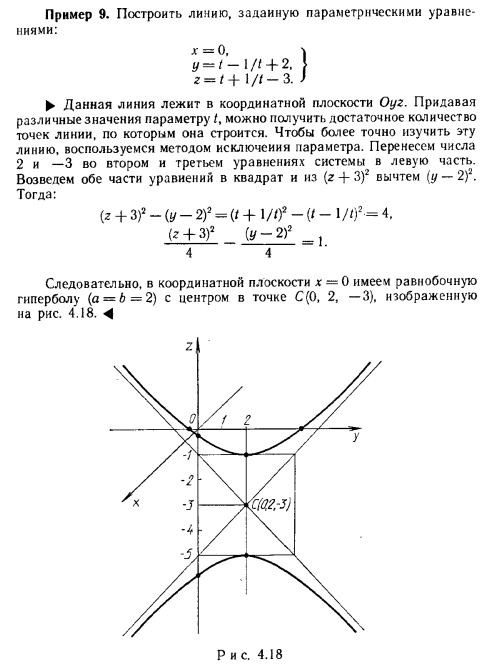


**Приклад 9.** Побудувати лінію, задану параметричними рівняннями:



Данна лінія лежить в координатній площині Oyz. Надаючи різні значеня параметру t , можна отримати достатню кількість точок лінії, по яким вона будується. Щоб більш точно вивчити цю лінію, скористаємось методом виключення параметра. Перенесемо числа 2 і -3 в другому і третьому рівняннях системи в ліву частину. Піднесемо обидві частини рівнянь до квадрату і з (z+3)2 віднімемо (у-2)2. Тоді: 

Отже, в координатній площині х=0 маємо рівнобічну гіперболу(a=b=2) з центром в точці С(0,2,-3)



***3. Задачі для практичного заняття***

У задачах 2.1 – 2.3 необхідно:

1. Написати рівняння прямої, звести його до загального вигляду та побудувати пряму;
2. Звести загальне рівняння до нормального вигляду і вказати відстань від початку координат до прямої.
   1. Пряма *l* задана точкою та нормальним вектором :

*а)*

*б)*

*в)*

* 1. Пряма *l* задана точкою та напрямним вектором

*а)*

*б)*

*в)*

* 1. Пряма *l* задана двома точками та :

*а) , ;*

*б), ;*

*в) , ;*

* 1. Задана пряма *l* та точка *М*. Необхідно:

1. Обчислити відстань від точки *М* до прямої *l;*
2. Написати рівняння прямої *l`,* яка проходить через точку *М* перпендикулярно заданій прямій *l;*
3. Написати рівняння прямої *l`,* яка проходить через точку *М* паралельно заданій прямій *l*

Вхідніт дані:

*а) l: -2х+у-1=0 М(-1,2)*

*б) l: 2у+1=0 М(1,0)*

*в) l: х+у+1=0 М(0,-1)*

У задачах 2.5 – 2.8 дослідити взаємне розташування заданих прямих і . Прицьому, якщо , знайти відстань між прямими, а якщо ж прямі перетинаються, то знайти косинус кута між ними і точку перетину прямих.

* 2. ,
  3. ,
  4. ,

***ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ.***

1. Дані вершини трикутника ABC: A(), B(), C(). Знайти:

а) рівняння сторони АВ;

б) рівняння висоти СН;

в) рівняння медіани АМ;

г) точку N перетину медіани АМ і висоти СН;

д) рівняння прямої, що проходить через вершину С паралельно стороні АВ;

е) відстань від точки С до прямої АВ.

***1.1*** А(-2,4) В(3,1) С(10,7)

***1.2*** А(-3,-2) В(14,4) С(6,8)

***1.3*** А(1,7) В(-3,-1) С(11,-3)

***1.4*** А(1,0) В(-1,4) С(9,5)

***1.5*** А(1,-2) В(7,1) С(3,7)

***1.6*** А(-2,-3) В(1,6) С(6,1)

***1.7*** А(-4,2) В(-6,6) С(6,2)

***1.8*** А(4,-3) В(7,3) С(1,10)

***1.9*** А(4,-4) В(8,2) С(3,8)

***1.10*** А(-3,-3) В(5,-7) С(7,7)

***1.11*** А(1,-6) В(3,4) С(-3,3)

***1.12*** А(-4,2) В(8,-6) С(2,6)

***1.13*** А(-5,2) В(0,-4) С(5,7)

***1.14*** А(4,-4) В(6,2) С(-1,8)

***1.15*** А(-3,8) В(-6,2) С(0,-5)

***1.16*** А(6,-9) В(10,-1) С(-4,1)

***1.17*** А(4,1) В(-3,-1) С(7,-3)

***1.18*** А(-4,2) В(6,-4) С(4,10)

***1.19*** А(3,-1) В(11,3) С(-6,2)

***1.20*** А(-7,-2) В(-7,4) С(5,-5)

***1.21*** А(-1,-4) В(9,6) С(-5,4)

***1.22*** А(10,-2) В(4,-5) С(-3,1)

***1.23*** А(-3,-1) В(-4,-5) С(8,1)

***1.24*** А(-2,-6) В(-3,5) С(4,0)

***1.25*** А(-7,-2) В(3,-8) С(-4,6)

***1.26*** А(0,2) В(-7,-4) С(3,2)

***1.27*** А(7,0) В(1,4) С(-8,-4)

***1.28*** А(1,-3) В(0,7) С(-2,4)

***1.29*** А(-5,1) В(8,-2) С(1,4)

***1.30*** А(2,5) В(-3,1) С(0,4)

1. Розв’язати наступні задачі
   1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих i і відсікаючої на вісі абсцис відрізок, рівний 3 (Відповідь: *х*=3)
   2. Знайти проекцію точки А(-8,12) на пряму, що проходить через точки В(2,-3) і С(-5,1). (Відповідь: )
   3. Дано дві вершини трикутника АВС: А(-4,4), В(4,-12) і точка М(4,2) перетину його висот. Знайти вершину С. (Відповідь: С(8,4))
   4. Знайти рівняння прямої, відсічної на осі ординат відрізок, рівний 2, і яка проходить паралельно прямій (Відповідь :)
   5. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку А(2,-3) і точку перетину прямих і (Відповідь: *х*=2)
   6. Довести, що чотирикутник ABCD – трапеція, якщо А(3,6), В(5,2), С(-1,-3), D(-5,5)
   7. Записати рівняння прямої, що проходить через точку А(3,1) перпендикулярно до прямої ВС, якщо В(2,5), С(1,0) (Відповідь: ))
   8. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку А(-2,1) паралельно прямій MN, якщо M(-3,-2), N(1,6). (Відповідь: )
   9. Знайти точку, симетричну точці М(2,-1) відносно прямої . (Відповідь: )
   10. Знайти точку, О перетину діагоналей чотирикутника ABCD, якщо А(-1,-3), В(3,5), С(5,2), D(3,-5). (Відповідь : O(3, 1/3))
   11. Через точку перетину прямих 6*х-*4*у+*5*=*0*,* провести пряму, паралельну вісі абсцис (Відповідь: *у=-1*)
   12. Відомі рівняння сторони АВ трикутника АВС його висоти ВН і АМ Знайти рівняння двох інших сторін трикутника АВС. (Відповідь: )
   13. Дано дві вершини трикутника АВС: А(-6,2), В(2,-2) і точка перетину його висот Н(1,2). Знайти координати точки М перетину сторони АС і висоти ВН. (Відповідь: М(10/17, 62/17))
   14. Знайти рівняння висот трикутника АВС, що проходить через вершини А і В, якщо А(-4,2), В(3,-5), С(5,0). (Відповідь: )
   15. Вичислити координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого слугують точки А(2,3), В(0,-3), С(6,-3). (Відповідь: М(3,-2/3))
   16. Скласти рівняння висоти, проведеної через вершину А трикутника АВС, знаючи рівняння його сторін: . (Відповідь: 2х+3у-7=0)
   17. Даний трикутник з вершинами А(3,1), В(-3,-1) і С(5,-12). Знайти рівняння і обчислити довжину його медіани, проведеної з вершини С. (Відповідь: 2х+у+2=0, )
   18. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку перетину прямих і . (Відповідь: )
   19. Знайти рівняння перпендикулярів до прямої , проведених через точки перетину даною прямою з осями координат (Відповідь: )
   20. Задані рівняння сторін чотирикутника: . Знайти рівняння його діагоналей. (Відповідь: у=0, х=3)
   21. Скласти рівняння медіани СМ і висоти СК трикутника АВС, якщо А(4,6), В(-4,0), С(-1,-4). (Відповідь:
   22. Через точку Р(5,2) провести пряму : а) відсікаючу рівні відрізки на осях координат; б) паралельну вісі Ох; в) паралельну вісі Оу. (Відповідь: )
   23. Записати рівняння прямої, що проходить через точку А(-2,3) і складаючий з віссю Ох кут а) , б)90, в)0. (Відповідь: )
   24. Яку ординату має точка С, що лежить на одній прямій з точками А(-6,-6) і В(-3,-1) і має абсцису рівну 3? (відповідь: у=9)
   25. Через точку перетину прямих провести пряму, що ділить відрізок між точками А(4,-3) і В(-1,2) у відношені (Відповідь: )
   26. Відомі рівняння двох сторін ромба і рівняння однієї з його діагоналей . Знайти рівняння другої діагоналі (Відповідь: )
   27. Знайти точку Е перетину медіан трикутника, вершинами якого є точки А(-3,1), В(7,5) і С(5,-3). (Відповідь: Е(3,1))
   28. Записати рівняння прямих, що проходять через точку А(-1,1) під кутом 45 до прямої (Відповідь: )
   29. Дано рівняння висот трикутника АВС і координати його вершини А(2,3). Знайти рівняння сторін АВ і АС трикутника. (Відповідь: )
   30. Дано рівняння двох сторін паралелограма і точка перетину його діагоналей М(3, -1). Знайти рівняння двох інших сторін. (Відповідь: )
2. Задано прямі та і точка М

Знайти:

1. Кутовий коефіцієнт прямої і відрізок, який відтинає ця пряма на осі ординат;
2. Рівняння прямих та у відрізках;
3. Точку перетину прямих і ;
4. Рівняння прямої , що проходить через точку М паралельно прямій ;
5. Рівняння прямої перпендикулярно до прямої
6. Відстань від точки М до прямої :

Усі результати ілюструвати графічно.

**Варіанти завдань**

31. Побудувати криву, задану рівнянням в полярній системі координат
32. Побудувати криву, задану параметричними рівняннями (0)